

Solution de l'Énigme Lycée n°8

Supposons que vous gagnez 1\$ le premier jour, 2\$ le deuxième, 3\$ le troisième, ...
Au bout de combien de jours serez-vous millionnaire ?

Comme souvent en Mathématiques, il existe plusieurs méthodes pour trouver la solution de cette énigme. Ici on peut procéder par tâtonnement ou utiliser des outils mathématiques plus puissants ; mais toutes les solutions restent aussi valables les unes que les autres.

Voici une solution :

A chaque jour n correspond un gain de n \$.

On peut définir une suite (u_n) correspondant au gain gagné le jour n : $u_n = n$

La suite (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 1$ et de raison 1.

On cherche à savoir au bout de combien de jours le gain total atteindra au moins 1 000 000 \$. Pour cela il faut déterminer la valeur de la somme des u_n . Appelons (S_n) la somme des n premiers termes de la suite (u_n) . Le nombre S_n représente donc le gain total au jour n .

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$$

$$S_n = \frac{n(1+n)}{2}$$

Il faut maintenant résoudre l'inéquation : $S_n \geq 1\,000\,000$

$$\frac{n(1+n)}{2} \geq 1\,000\,000$$

$$n(1+n) \geq 2\,000\,000$$

$$n^2 + n - 2\,000\,000 \geq 0$$

On cherche alors les racines du polynôme $n^2 + n - 2\,000\,000$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2\,000\,000) = 8\,000\,001 > 0$$

Donc le polynôme $n^2 + n - 2\,000\,000$ admet deux racines distinctes :

$$n_1 = \frac{-1 + \sqrt{8\,000\,001}}{2} \approx 1413,7$$

$$n_2 = \frac{-1 - \sqrt{8\,000\,001}}{2} \approx -1414,7$$

Le nombre de jours devant être un nombre entier positif, la solution de l'inéquation $n^2 + n - 2\,000\,000 \geq 0$ est **1414 jours**.